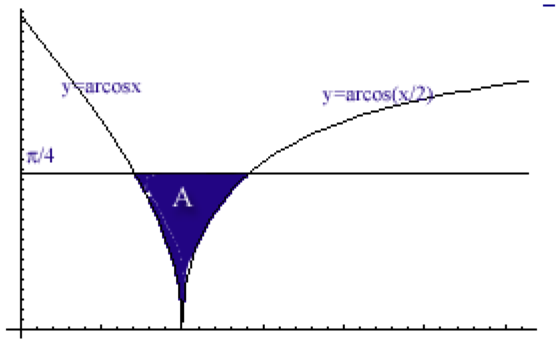
Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_A \frac{1}{x^3 \cos^2 y}\, dxdy$$

dove A è la parte di piano delimitata dalle funzioni :

$y = ar\cos x\,;\; y = ar\cos\frac{1}{x}$ e dalla retta $y = \frac{\pi}{4}$



Il dominio A è normale rispetto all'asse delle y, pertanto la *y* varierà tra 0 e *π/4* e la x varierà tra cosy e 1/cosy(ottenute ricavando la x in funzione di y da $y = ar\cos x$ e $y = ar\cos\frac{1}{x}$):.

Pertanto

$$\iint_A \frac{1}{x^3 \cos^2 y}\, dxdy = \int_0^{\pi/4} \frac{dy}{\cos^2 y} \int_{\cos y}^{\frac{1}{\cos y}} \frac{dx}{x^3}$$

Facilmente si calcola il secondo integrale , ottenendo:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dy}{\cos^2 y} \int_{\cos y}^{\frac{1}{\cos y}} \frac{dx}{x^3} = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{\cos y}^{\cos\frac{1}{x}} \frac{dy}{\cos^2 y} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 y - \frac{1}{\cos^2 y}\right)\frac{dy}{\cos^2 y} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{\cos^4 y}\right) dy =$$

Calcoliamo da parte $\int \frac{1}{\cos^4 y}\, dy$

Posto

$tgy = t$

$y = ar\cot angt$

$dy = \frac{1}{1+t^2}$

$\cos^2 y = \frac{1}{1+t^2}; seny = \frac{t^2}{1+t^2}$

si ha:

$$\int \frac{1}{\cos^4 y} dy = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} dt = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3}$$

Ritornando alla variabile y :

$$\int \frac{1}{\cos^4 y} dy = tgy + \frac{1}{3} tg^3 y$$

Ritornando al nostro integrale :

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{\cos^4 y}\right) dy = -\frac{1}{2}\left[y - tgy - \frac{1}{3} tg^3 y\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{-1}{2} y + \frac{1}{2} tgy + \frac{1}{6} tg^3 y\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}$$

Esercizio 4

Calcolare il seguente integrale:

dove A è il quarto della corona circolare di centro l’origine e raggi 1 e 2, sito nel primo quadrante